Секция 3

Актуальные проблемы научных исследований в области физики, математики и информатики

Т.А. АРТЮШЕНЯ, А.А. ТРОФИМУК
БрГУ им. А.С. Пушкина (г. Брест, Беларусь)

О РАЗРЕШИМЫХ ГРУППАХ С МАЛЫМИ ИНДЕКСАМИ P-СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП В СВОИХ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЯХ

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Пусть G – группа. Рассмотрим цепочку подгрупп группы G:

$$1 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_i \subseteq \ldots,$$

где $F_{i+1}/F_i = F(G/F_i)$. Здесь $F(X)$ – подгруппа Фиттинга группы X. Если G разрешима, то существует натуральное число n такое, что $F_n = G$. Наименьшее натуральное число с таким свойством называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m, для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^i = (G^{(i-1)})'$.

Для p – разрешимой группы можно определить (p', p) – ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq \ldots \subseteq P_l \subseteq N_l = G,$$

где $N_i / P_i = O_{p'}(G/P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G/P_i, а $P_{i+1}/N_i = O_p(G/N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G/N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют p-длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева и В.Н. Тютянов в [2] предложили следующее определение: пусть P – множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется P-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ – простое число для любого $i = 0,1,\ldots,n-1$. Обозначается H – P-sn G. Возникает задача изучения групп, у которых каждая подгруппа из заданной системы подгрупп является P-субнормальной.

Так, в работе [3] Л.С. Казарин описал неабелевы композиционные факторы конечных групп, у которых единичная подгруппа является P-субнормальной в группе G. Группы, у которых P-субнормальны все максимальные подгруппы, являются сверхразрешимыми. Группы с P-субнормальными 2-максимальными подгруппами, силовскими подгруппами, примарными циклическими подгруппами, подгруппами Шмидта исследованы в работах [4–7].

Продолжим исследование в данном направлении. Для формулировки основного результата введем следующую функцию: пусть p – простое число. Для натурального числа n, запись $p^j \| n$ означает, что p^j делит n, но p^{j+1} не делит n. Для группы G и простого числа p мы полагаем: $k_p(G) = \max_{H\,\mathrm{P}-snG} \{ j \mid p^j \| |H^G : H| \}$ и $k(G) = \max_p k_p(G).$

Теорема. Пусть G – разрешимая группа и $k(G) \le 2.$ Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G) \le 4$;
2) $d(G/\Phi(G)) \le 6$;
3) $l_p(G) \le 1$, если $p > 3$, и $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$.

Следствие 1. Если G – разрешима, A_4-свободная группа и $k(G) \le 2,$ то $d(G/\Phi(G)) \le 5$.

Следствие 2. Если G – разрешимая группа и $k(G) \le 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $n(G) \le 4$;
2) $d(G/\Phi(G)) \le 5$.

Следствие 3. Если G – разрешимая, A_4-свободная группа и $k(G) \le 1,$ то $d(G/\Phi(G)) \le 3$ и $n(G) \le 3$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Васильев, А.Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // ПФМТ. – 2010. – № 2(3). – С. 21–27.
3. Казарин, Л.С. О группах с факторизацией / Л.С. Казарин // Доклады АНСССР. – 1981. – Т 256, № 1. – С. 26–29.
4. Kniagina, V.N. Finite groups with P-subnormal 2-maximal subgroups / V.N. Kniagina, V.S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1105.3663.pdf, 18 May 2011.
5. Kniagina, V.N. Finite groups with P-subnormal primary cyclic subgroups / V.N. Kniagina, V.S. Monakhov // arxiv.org e-Print archive, arxiv.org/pdf/1110.4720, 18 Nov 2011.
6. Vasilyev, A.F. On the finite groups of supersoluble type / A.F. Vasilyev, T.I. Vasilyeva, V. N. Tyutyanov // Sib. Math. J. 2010. – Т. 51, №. 6. С. 1004–1012.
7. Kniagina, V.N. On supersolvability of finite groups with P-subnormal subgroups / V.N. Kniagina, V.S. Monakhov // International Journal of Group Theory. – 2013. – Vol. 2, №4. – P. 21–29.

А. И. БЕЗУГЛЫЙ
ВДПУ им. Михаила Коцюбинского, Украина, Винница

ВИРТУАЛЬНАЯ ЛАБОРАТОРИЯ КАК СОСТАВЛЯЮЩАЯ СМАРТ-УНИВЕРСИТЕТА

Словосочетание «виртуальная лаборатория» вошло в нашу жизнь благодаря появлению компьютерной техники и развитию современных технологий виртуализации. Сегодня можно выделить два понимания этого понятия.